من اعداد الأستاذ : قنيس سليم





سلسلة تمارين حول الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

التمرين رقم 01

1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 945 و 1215 عن طريق:

- إجراء عمليات الطرح المتتالية.
- إجراء سلسلة القسمات الإقليدية.
- البحث عن مجموعة القواسم المشتركة.

2) أكتب $\frac{945}{1215}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين رقم 02

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 140 و 220.

2) صفيحة زجاجية مستطيلة الشكل بعداها $1{,}40\ m$ و $2{,}20\ m$، جزئت إلى مربعات متساوية بأكبر ضلع دون ضياع.

أ- ما هو طول ضلع كل مربع؟

ب- ما هو عدد المربعات الناتجة؟

التمرين رقم 03

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 696 و 406 مع كتابة مراحل الحساب.

2) أكتب $\frac{696}{406}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

3) أحسب العدد P حيث:

$$P = \frac{696}{406} - \frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$$

التمرين رقم 04

نريد ملء دنّين بالماء وذلك باستعمال دنّ سعته $x\ L$ حيث x عدد طبيعي.

إذا علمت أن سعة الدّنّ ① هي $18\ L$ وسعة الدّنّ ② هي $15\ L$.



1) ما هي أكبر قيمة للعدد x؟ (نفرغ هذا الدّنّ كليا في كل مرة).

2) كم مرة استعملنا هذا الدّنّ لملء الدّنّ ①؟ الدّنّ ②؟

التمرين رقم 05

مجلدان أحدهما به 2848 صفحة و الآخر به 1792 صفحة، بحيث كل مجلد متكون من مجموعة على شكل كراريس صفحاتها تتراوح بين 28 و 36 صفحة.

1) ما هو عدد الصفحات في الكراس الواحد؟

2) ما هو عدد الكراريس في كلا المجلدين؟

التمرين رقم 06

لتكن العبارة E حيث:

$$E = \frac{772497}{6160} + \frac{3}{56}$$

- أكتب العبارة E على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين رقم 07

لصاحب مكتبة 78 كتاب رياضيات، و 102 كتاب تكنولوجيا. أراد صاحب المكتبة أن يرتبها في رفوف مكتبته بحيث تكون كل الرفوف متماثلة من حيث عدد كتب الرياضيات وكتب التكنولوجيا.

1) ما هو أكبر عدد من الرفوف المستعملة؟

2) إذا كان سمك كتاب الرياضيات هو $1{,}5\ cm$ وسمك كتاب التكنولوجيا هو $1\ cm$، فما هو طول كل رف (توضع الكتب جنبا إلى جنب في كل رف)؟

التمرين رقم 08

نريد غرس أشجار على محيط حديقة مثلثة الشكل على أن توجد شجرة في كل ركن من أركان الحديقة، وأن تكون المسافة التي تفصل الأشجار متساوية.

1) ما هي أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين إذا علمت أن الأبعاد الثلاثة للحديقة هي: $42\ m$ و $70\ m$ و $98\ m$ ؟

2) ما هو عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول هذه الحديقة؟

التمرين رقم 09

a و b عددان طبيعيان بحيث: $a > b$.

- أوجد جميع الثنائيات المرتبة $(a\,;b)$ حيث:

$$\begin{cases} a \times b = 6912 \\ PGCD(a\,;b) = 24 \end{cases}$$

الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

التمرين رقم 02

1- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 140 و 220.

2- صفيحة زجاجية مستطيلة الشكل بعداها $1,40\ m$ و $2,20\ m$، جزئت إلى مربعات متساوية بأكبر ضلع دون ضياع.

أ- ما هو طول ضلع كل مربع؟

ب- ما هو عدد المربعات الناتجة؟

الحل رقم 02

1- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 140 و 220:

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$$220 = 1 \times 140 + 80$$
$$140 = 1 \times 80 + 60$$
$$80 = 1 \times 60 + 20$$
$$60 = 3 \times 20 + 0$$

لاحظ أن:

آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس هو 20.

ومنه:

$$PGCD(220\ ;140) = 20$$

2- صفيحة زجاجية مستطيلة الشكل بعداها $1,40\ m$ و $2,20\ m$، جزئت إلى مربعات متساوية بأكبر ضلع دون ضياع.

لاحظ أن:

$$\begin{cases} 1,40\ m = 140\ cm \\ 2,20\ m = 220\ cm \end{cases}$$

أ- إيجاد طول ضلع كل مربع:

طول ضلع كل مربع هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 220 و 140.

لأن:

- طول الصفيحة الزجاجية هو $220\ cm$.
- عرض الصفيحة الزجاجية هو $140\ cm$.

من السؤال 1- وجدنا:

$$PGCD(220\ ;140) = 20$$

ومنه:

طول ضلع كل مربع هو $20\ cm$.

ب- إيجاد عدد المربعات الناتجة:

- نحسب عدد المربعات الناتجة على طول الصفيحة الزجاجية:

$$N_1 = \frac{220}{20} = \frac{22}{2} = 11$$

عدد المربعات الناتجة على طول الصفيحة الزجاجية هو 11 مربع.

- نحسب عدد المربعات الناتجة على عرض الصفيحة الزجاجية:

$$N_2 = \frac{140}{20} = \frac{14}{2} = 7$$

عدد المربعات الناتجة على عرض الصفيحة الزجاجية هو 7 مربعات.

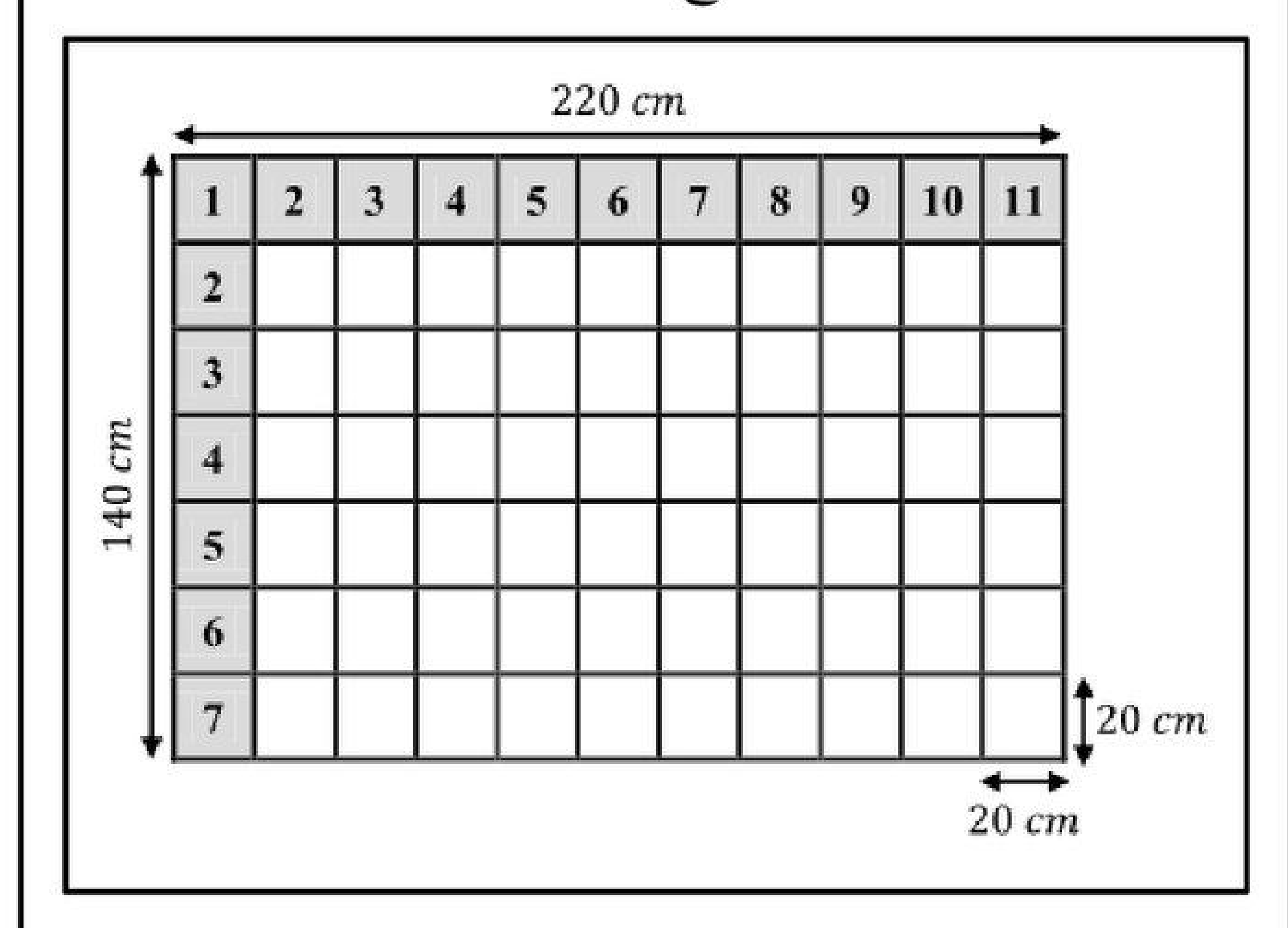
فيكون:

عدد المربعات الكلية الناتجة هو:

$$N = N_1 \times N_2 = 11 \times 7 = 77$$

ومنه:

عدد المربعات الناتجة هو 77 مربع.



من اعداد الأستاذ : قنيس سليم



BEM 2020

الأعداد الطبيعية و الأعداد الناطقة

التمرين رقم 01

1- أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 945 و 1215 عن طريق:

- إجراء عمليات الطرح المتتالية.
- إجراء سلسلة القسمات الإقليدية.
- البحث عن مجموعة القواسم المشتركة.

2- أكتب $\frac{945}{1215}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

الحل رقم 01

1- إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 945 و 1215:

نستعين بخوارزمية إقليدس.

■ الطريقة الأولى: عمليات الطرح المتتالية

$1215 - 945 = 270$

$945 - 270 = 675$

$675 - 270 = 405$

$405 - 270 = 135$

$270 - 135 = 135$

$135 - 135 = 0$

■ الطريقة الثانية: سلسلة القسمات الإقليدية

$1215 = 1 \times 945 + 270$

$945 = 3 \times 270 + 135$

$270 = 2 \times 135 + 0$

1215	945	945	270	270	135
270	1	135	3	0	2

ملاحظة:

يمكن تلخيص سلسلة القسمات الإقليدية في الجدول التالي:

الحاصل	1	3	2
1215	945	270	135
الباقي	270	135	0

- آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات الإقليدية هو 135.

القاسم المشترك الأكبر للعددين 1215 و 945 هو 135.

ونكتب:

$$PGCD(1215\,;945) = 135$$

■ الطريقة الثالثة: البحث عن مجموعة القواسم المشتركة

- مجموعة قواسم العدد 1215 هي:

$\{1\,;3\,;5\,;9\,;15\,;27\,;45\,;81\,;135\,;243\,;405\,;1215\}$

- مجموعة قواسم العدد 945 هي:

$\{1\,;3\,;5\,;9\,;15\,;27\,;35\,;63\,;105\,;189\,;315\,;945\}$

- مجموعة القواسم المشتركة للعددين 1215 و 945 هي:

$\{1\,;3\,;5\,;9\,;15\,;27\,;135\}$

أكبر عدد في مجموعة القواسم المشتركة للعددين 1215 و 945 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 1215 و 945.

ومنه:

$$PGCD(1215\,;945) = 135$$

2- كتابة $\frac{945}{1215}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال:

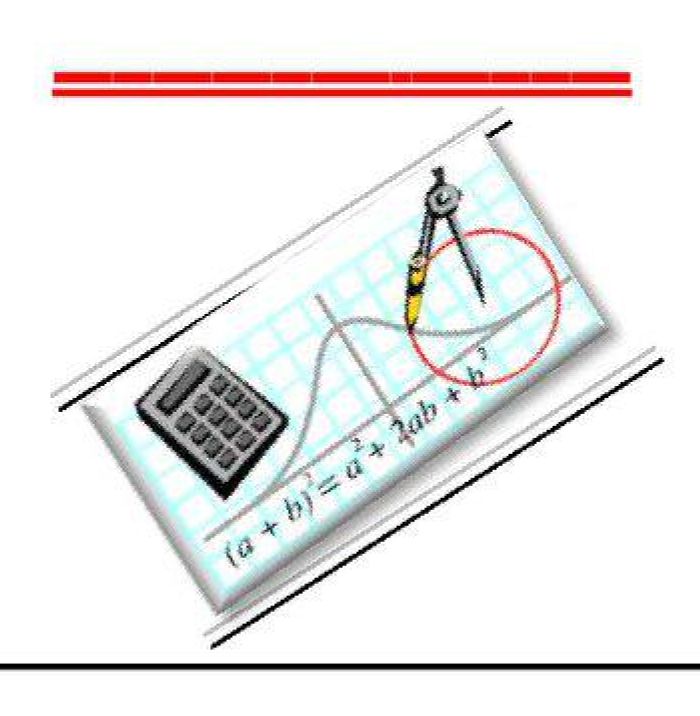
بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 1215 و 945 هو 135، فإنه يمكن قسمة كلّا من البسط والمقام على العدد 135 كما يلي:

$$\frac{945}{1215} = \frac{945 \div 135}{1215 \div 135} = \frac{7}{9}$$

الكسر غير قابل للاختزال للعدد $\frac{945}{1215}$ هو: $\frac{7}{9}$.

نتيجة:

الكسر $\frac{7}{9}$ غير قابل للإختزال.





الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

التمرين رقم 07

1) لصاحب مكتبة 78 كتاب رياضيات، و 102 كتاب تكنولوجيا. أراد صاحب المكتبة أن يرتبها في رفوف مكتبته بحيث تكون كل الرفوف متماثلة من حيث عدد كتب الرياضيات وكتب التكنولوجيا.

- ما هو أكبر عدد من الرفوف المستعملة؟

2) إذا كان سمك كتاب الرياضيات هو $1{,}5\ cm$ وسمك كتاب التكنولوجيا هو $1\ cm$.

- ما هو طول كل رف (توضع الكتب جنبا إلى جنب في كل رف)؟

الحل رقم 07

1) إيجاد أكبر عدد من الرفوف المستعملة:

أكبر عدد من الرفوف المستعملة هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 102 و 78.

لأن:

- عدد كتب التكنولوجيا في المكتبة هو 102 كتاب.
- عدد كتب الرياضيات في المكتبة هو 78 كتاب.

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 102 و 78.

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$$102 = 1 \times 78 + 24$$
$$78 = 3 \times 24 + 6$$
$$24 = 4 \times 6 + 0$$

لاحظ أن:

آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس هو 6.

ومنه:

$$PGCD(102\,;78) = 6$$

فيكون:

أكبر عدد من الرفوف المستعملة هو 6 رفوف.

بحيث:

- عدد كتب التكنولوجيا في كل رفّ هو: 17 كتاب.

$$\frac{102}{6} = 17$$

- عدد كتب الرياضيات في كل رفّ هو: 13 كتاب.

$$\frac{78}{6} = 13$$

ملاحظة:

يوجد في كل رفّ 17 كتاب تكنولوجيا و 13 كتاب رياضيات.

2) حساب طول كل رف:

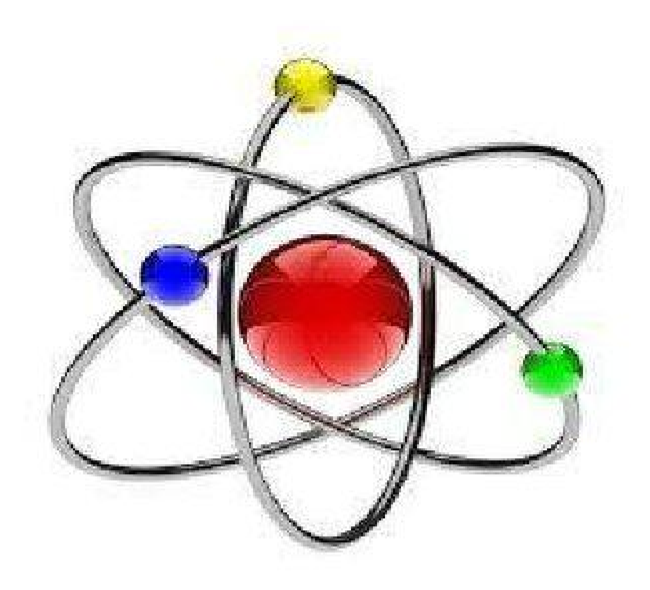
سمك كتاب التكنولوجيا هو $1\ cm$ وعدد كتب التكنولوجيا في كل رف هو 17 كتاب، وسمك كتاب الرياضيات هو $1\ cm$ وعدد كتب الرياضيات في كل رف هو 13 كتاب.

فيكون طول كلّ رفّ:

$$l = 17 \times 1 + 13 \times 1{,}5 = 36{,}5\ cm$$

ومنه:

طول كلّ رفّ هو $36{,}5\ cm$.



التمرين رقم 06

لتكن العبارة E حيث:

$$E = \frac{772497}{6160} + \frac{3}{56}$$

- أكتب العبارة E على شكل كسر غير قابل للاختزال.

الحل رقم 06

كتابة العبارة E على شكل كسر غير قابل للاختزال:

$$E = \frac{772497}{6160} + \frac{3}{56}$$

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 772497 و 6160.

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$$772497 = 125 \times 6160 + 2497$$
$$6160 = 2 \times 2497 + 1166$$
$$2497 = 2 \times 1166 + 165$$
$$1166 = 7 \times 165 + 11$$
$$165 = 15 \times 11 + 0$$

لاحظ أن:

آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس هو 11.

ومنه:

$$PGCD(772497\,;6160) = 11$$

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 772497 و 6160 هو 11، فإنه يمكن قسمة كلّا من 772497 و 6160 على العدد 11 كما يلي:

$$E = \frac{772497}{6160} + \frac{3}{56}$$

$$E = \frac{772497 \div 11}{6160 \div 11} + \frac{3}{56}$$

$$E = \frac{70227}{560} + \frac{3}{56}$$

يمكن الآن توحيد المقامات كما يلي:

$$E = \frac{70227}{560} + \frac{3 \times 10}{56 \times 10}$$

$$E = \frac{70227}{560} + \frac{30}{560}$$

$$E = \frac{70227 + 30}{560}$$

$$E = \frac{70257}{560}$$

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 70257 و 560.

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$$70257 = 125 \times 560 + 257$$
$$560 = 2 \times 257 + 46$$
$$257 = 5 \times 46 + 27$$
$$46 = 1 \times 27 + 19$$
$$27 = 1 \times 19 + 8$$
$$19 = 2 \times 8 + 3$$
$$8 = 2 \times 3 + 2$$
$$3 = 1 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$

لاحظ أن:

آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس هو 1.

ومنه:

$$PGCD(70257\,;560) = 1$$

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 70257 و 560 هو 1، أي أنهما أوليان فيما بينهما، فإن الكسر $\frac{70257}{560}$ غير قابل للاختزال.

ومنه:

$$E = \frac{70257}{560}$$



الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

التمرين رقم 08

نريد غرس أشجار على محيط حديقة مثلثة الشكل على أن توجد شجرة في كل ركن من أركان الحديقة، وأن تكون المسافة التي تفصل الأشجار متساوية.

1- ما هي أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين إذا علمت أن الأبعاد الثلاثة للحديقة هي: $42\ m$ و $70\ m$ و $98\ m$ ؟

2- ما هو عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول هذه الحديقة؟

الحل رقم 08

1) إيجاد أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين:

أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين هي القاسم المشترك الأكبر للأعداد 98 ، 70 و 42.

لأن:

الأبعاد الثلاثة للحديقة هي: $42\ m$ و $70\ m$ و $98\ m$.

نبحث أولا عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 98 و 70.

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$98 = 1 \times 70 + 28$

$70 = 2 \times 28 + 14$

$28 = 2 \times 14 + 0$

لاحظ أن:

آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس هو 14.

نكتب:

$$PGCD(98\,;70) = 14$$

نبحث ثانيا عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 42 و 14.

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$42 = 3 \times 14 + 0$

نكتب:

$$PGCD(42\,;14) = 14$$

نتيجة:

$$PGCD(98\,;70\,;42) = 14$$

ومنه:

أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين شجرتين متجاورتين هي $14\ m$.

2) إيجاد عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول الحديقة:

ليكن:

- n_1 عدد الأشجار التي يمكن غرسها في الطول $98\ m$.
- n_2 عدد الأشجار التي يمكن غرسها في الطول $70\ m$.
- n_3 عدد الأشجار التي يمكن غرسها في الطول $42\ m$.

فينتج:

$$n_1 = \frac{98}{14} = 7$$

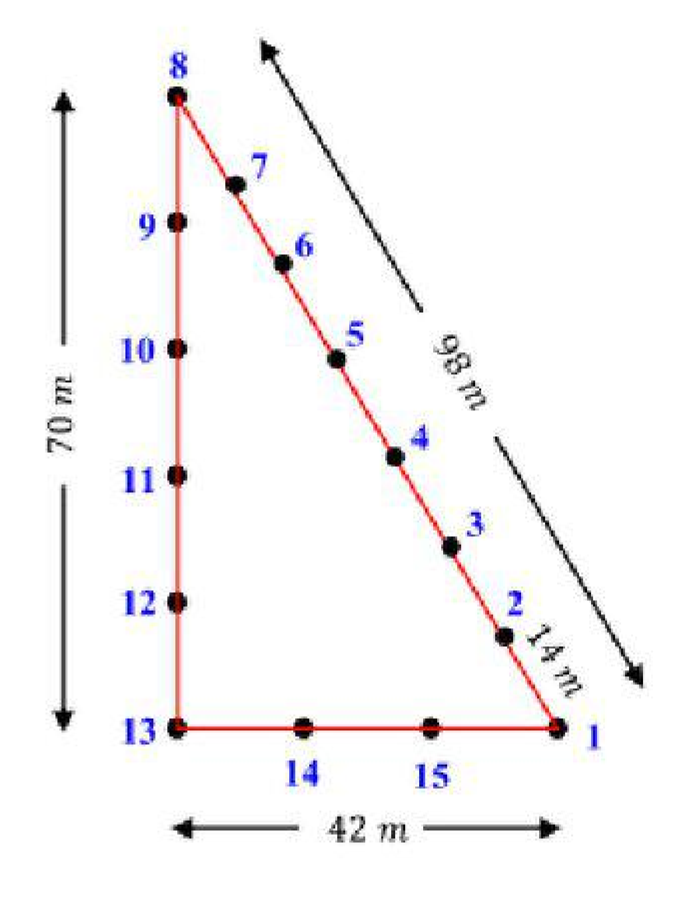
$$n_2 = \frac{70}{14} = 5$$

$$n_3 = \frac{42}{14} = 3$$

ومنه:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 7 + 5 + 3 = 15$$

عدد الأشجار التي يمكن غرسها حول هذه الحديقة هو: 15 شجرة.





الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

التمرين رقم 05

مجلدان أحدهما به 2848 صفحة و الآخر به 1792 صفحة، بحيث كل مجلد متكون من مجموعة على شكل كراريس صفحاتها تتراوح بين 28 و 36 صفحة.

1) ما هو عدد الصفحات في الكراس الواحد؟

2) ما هو عدد الكراريس في كلا المجلدين؟

الحل رقم 05

1) إيجاد عدد الصفحات في الكراس الواحد:

عدد الصفحات في الكراس الواحد هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 2848 و 1792.

لأن:

- المجلد الأول به 2848 صفحة.
- المجلد الثاني به 1792 صفحة.

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2848 و 1792.

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$$2848 = 1 \times 1792 + 1056$$
$$1792 = 1 \times 1056 + 736$$
$$1056 = 1 \times 736 + 320$$
$$736 = 2 \times 320 + 96$$
$$320 = 3 \times 96 + 32$$
$$96 = 3 \times 32 + 0$$

لاحظ أن:

آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس هو 32.

ومنه:

$$PGCD(2848\,;1792) = 32$$

فيكون:

عدد الصفحات في الكراس الواحد هو 32 صفحة.

ملاحظة:

العدد 32 محصور بين 28 و 36 (النتيجة توافق نص التمرين).

2) إيجاد عدد الكراريس في كلا المجلدين:

إيجاد عدد الكراريس في المجلد الأول:

المجلد الأول به 2848 صفحة، مكونة من n كراس، كل كراس به 32 صفحة.

حيث:

$$n = \frac{2848}{32} = 89$$

عدد الكراريس في المجلد الأول هو 89 كراس.

إيجاد عدد الكراريس في المجلد الثاني:

المجلد الثاني به 1792 صفحة، مكونة من m كراس، كل كراس به 32 صفحة.

حيث:

$$m = \frac{1792}{32} = 56$$

عدد الكراريس في المجلد الثاني هو 56 كراس.



الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

التمرين رقم 03

1- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 696 و 406 مع كتابة مراحل الحساب.

2- أكتب $\frac{696}{406}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

3- أحسب العدد P حيث:

$$P=\frac{696}{406}-\frac{3}{7}\times\frac{5}{2}$$

الحل رقم 03

1- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 696 و 406:

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$$696=1\times 406+290$$
$$406=1\times 290+116$$
$$290=2\times 116+58$$
$$116=2\times 58\ \ +0$$

لاحظ أن:

آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس هو 58.

ومنه:

$$PGCD(696\,;406)=58$$

2- كتابة $\frac{696}{406}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال:

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 696 و 406 هو 58، فإنه يمكن قسمة كلّا من البسط والمقام على العدد 58 كما يلي:

$$\frac{696}{406}=\frac{696\div 58}{406\div 58}=\frac{12}{7}$$

الكسر غير قابل للاختزال للعدد $\frac{696}{406}$ هو: $\frac{12}{7}$.

تذكر دائما:

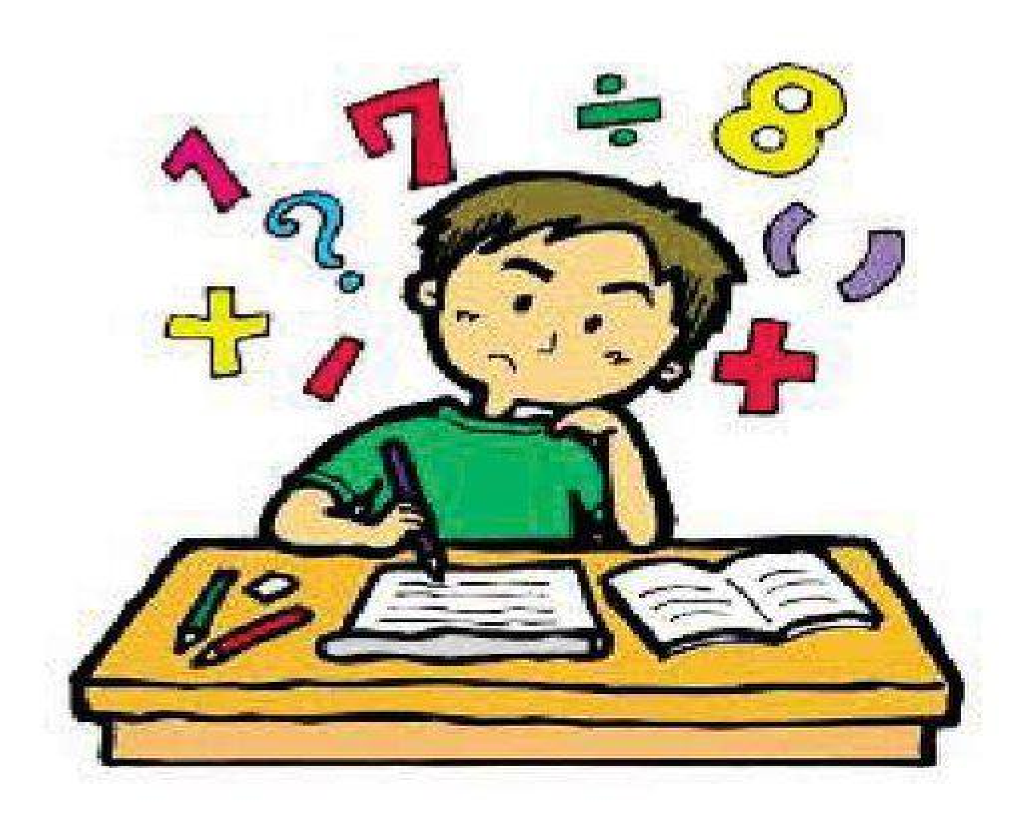
عندما نقسم كلا من حدّي كسر على القاسم المشترك الأكبر لبسطه ومقامه نحصل على كسر غير قابل للاختزال.

3- حساب العدد P:

$$P=\frac{696}{406}-\frac{3}{7}\times\frac{5}{2}$$
$$=\frac{12}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{5}{2}$$
$$=\frac{12}{7}-\frac{3\times 5}{7\times 2}$$
$$=\frac{12}{7}-\frac{15}{14}$$
$$=\frac{12\times 2}{7\times 2}-\frac{15}{14}$$
$$=\frac{24}{14}-\frac{15}{14}$$
$$=\frac{24-15}{14}$$

ومنه:

$$P=\frac{9}{14}$$





الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

التمرين رقم 04

نريد ملء دنّين بالماء وذلك باستعمال دنّ سعته $x\ L$ حيث x عدد طبيعي. إذا علمت أن سعة الدّنّ ① هي $18\ L$ وسعة الدّنّ ② هي $15\ L$.



1- ما هي أكبر قيمة للعدد x؟ (نفرغ هذا الدّنّ كليا في كل مرة).

2- كم مرة استعملنا هذا الدّنّ لملء الدّنّ ①؟ الدّنّ ②؟

الحل رقم 04

1- إيجاد أكبر قيمة للعدد x:

أكبر قيمة للعدد x هي القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و 15.

لأن:

- سعة الدّنّ ① هي $18\ L$.
- سعة الدّنّ ② هي $15\ L$.

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و 15.

بتطبيق خوارزمية إقليدس (سلسلة القسمات الاقليدية)، ينتج:

$18 = 1 \times 15 + 3$

$15 = 5 \times 3 \ \ + 0$

لاحظ أن:

آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس هو 3.

ومنه:

$$PGCD(18\,;15) = 3$$

فتكون:

أكبر قيمة للعدد x هي $3\ L$.

2- إيجاد عدد المرات التي استعملنا فيها الدّنّ ①:

سعة الدّنّ ① هي $18\ L$.

عدد مرات استعمال الدّنّ ① هي:

$$① = \frac{18}{3} = 6$$

ومنه:

استعمل الدّنّ ① 6 مرات.

إيجاد عدد المرات التي استعملنا فيها الدّنّ ②:

سعة الدّنّ ② هي $15\ L$.

عدد مرات استعمال الدّنّ ② هي:

$$② = \frac{15}{3} = 5$$

ومنه:

استعمل الدّنّ ② 5 مرات.

